ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА
МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

А.А ЦУПАК

ПСЕВДООБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ

ПЕНЗА 2008

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143

Изложена теория полуобратных и псевдообратных матриц на основе скелетного разложения числовых матриц над полем комплексных чисел. Доказаны теоремы существования и единственности псевдообратных матриц. Описан алгоритм псевдообращения, приведены примеры.

Методические указания подготовлены на кафедре "Математика и математическое моделирование" и предназначена для студентов и аспирантов специальностей "Математика" и "Прикладная математика."

Автор А.А. Цупак

Рецензент: С.Н. Дорофеев, доктор педагогических наук, кандидат физ.-мат. наук, заведующий кафедрой "Математика" Пензенской государственной технологической академии

Содержание

1 Полуобратные матрицы

1.1 Одностороннее обращение матриц

1.1.1 Определения; связь обращения с односторонним обращением

Из курса алгебры известны следующие определения и свойства односторонней обратимости числовых матриц (матриц над полем $\mathbb{C}$).

- Матрица $B^{-1l}_{n\times m}$ является левой обратной матрицей матрицы $B_{m\times n}$, если $B^{-1l}_{n\times m}\cdot B_{m\times n}=E_{n\times n}$,

$$\exists\ \ B^{-1l}_{n\times m} \Leftrightarrow \operatorname{rang} B_{m\times n}=n\le m,$$

$$\exists!\ B^{-1l}_{n\times m} \Leftrightarrow \operatorname{rang} B_{m\times n}=n=m.$$

- Матрица $C^{-1r}_{n\times m}$ является правой обратной матрицей для матрицы $C_{m\times n}$, если $C_{m\times n}\cdot C^{-1r}_{n\times m}=E_{m\times m}$,

$$\exists\ \ C^{-1r}_{n\times m} \Leftrightarrow \operatorname{rang} C_{m\times n}=m\le n,$$

$$\exists!\ C^{-1r}_{n\times m} \Leftrightarrow \operatorname{rang} C_{m\times n}=m=n.$$

- Матрица $A^{-1}_{n\times n}$ является обратной матрицей для матрицы $A_{n\times n}$, если $A^{-1}_{n\times n}\cdot A_{n\times n}=A_{n\times n}\cdot A^{-1}_{n\times n}=E_{n\times n}$,

$$\exists\ \ A^{-1}_{n\times m} \Leftrightarrow \operatorname{rang} A_{n\times n}=n,\quad \{n=m\},$$

$$\exists!\ A^{-1}_{n\times m} \Leftrightarrow \operatorname{rang} A_{n\times n}=n,\quad \{n=m\}.$$

Теорема. Матрица обратима тогда и только тогда, когда она обратима и слева, и справа.

Доказательство. Следует из вышеизложенного:

$$A_{m\times n}\ \text{обратима} \Longleftrightarrow r=m=n \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r=n\le m,\\ r=m\le n\end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A_{m\times n}\ \text{обр. слева},\\ A_{m\times n}\ \text{обр. справа}.\end{array}\right.$$

1.1.2 Простые свойства одностороннего обращения

Теорема 1. Если матрица B обратима слева, то всякая левая обратная матрица B^{-1l} обратима справа, и одним из значений имеет исходную матрицу B :

$$(B^{-1l})^{-1r} = B.$$

Доказательство. Очевидно, ведь

$$B^{-1l}_{n\times m} \cdot B_{m\times n} = E_{n\times n}.$$

Теорема 2. Если матрица C обратима справа, то всякая правая обратная матрица C^{-1r} обратима слева, и одним из значений имеет исходную матрицу C :

$$(C^{-1r})^{-1l} = C.$$

Доказательство. Очевидно, ведь

$$C_{m\times n} \cdot C^{-1r}_{n\times m} = E_{m\times m}.$$

1.1.3 Замечание об односторонней обратимости

Некоторые матрицы могут не иметь ни левой обратной, ни правой обратной матриц. Это будет всякий раз, когда

$$\operatorname{rang} A_{m\times n} < \min\{m, n\}.$$

В связи с этим в теории одностороннего обращения особую роль играет так называемое **скелетное разложение матрицы.**

1.2 Скелетное разложение матриц

1.2.1 Скелетное разложение матрицы (СРМ)

Определение. СРМ называется представление произвольной матрицы $A_{m\times n}$ в виде произведения $A_{m\times n} = B_{m\times r} \cdot C_{r\times n}$ при обязательных ранговых условиях

$$\operatorname{rang} B_{m\times r} = \operatorname{rang} C_{r\times n} = r = \operatorname{rang} A_{m\times n}\,, \qquad (*)$$

которые обеспечивают существование односторонних обращений

$$B^{-1l}_{r\times m}\,, \quad C^{-1r}_{n\times r}\,.$$

Замечание. В любом случае СРМ не единственно, т.к. если

$$A_{m\times n} = B_{m\times r}\cdot C_{r\times n}\,,$$

то для произвольной невырожденной матрицы $D_{r\times r}$

$$A_{m\times n} = (B_{m\times r}\, D_{r\times r})\cdot (D^{-1}_{r\times r}\, C_{r\times n}).$$

1.2.2 Один из способов нахождения СРМ

Для исходной матрицы вычисляем методом элементарных преобразований ее ранг, максимальное число ЛНЗ столбцов и коэффициенты, с которыми все столбцы выражаются через найденные ЛНЗ.

Т.к. $\operatorname{rang} A_{m\times n} = r$, в матрице $A_{m\times n}$ существуют r ЛНЗ столбцов $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \ldots, \vec{a}_{i_r}$, а все прочие являются их линейными комбинациями; сами ЛНЗ $\vec{a}_{i_j}$ также являются своими линейными комбинациями; таким образом, все столбцы матрицы $A = (\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3\ldots\vec{a}_n)$ являются линейными комбинациями столбцов $\vec{a}_{i_j} = \vec{b}_j$, составляющих матрицу $B = (\vec{b}_1\vec{b}_2\ldots\vec{b}_r)$:

$$\vec{a}_s = \sum_{t=1}^{r} \vec{b}_t c_{ts}, \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Коэффициенты c_{ts} образуют матрицу $C_{r\times n}$. Ранговые условия $(*)$ выполнены очевидным образом.

Пример 1. Найти скелетное разложение матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 6 \\ -4 & 7 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

В этом простом примере и без элементарных преобразований видно, что первые два столбца $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ ЛНЗ, а третий равен сумме двух первых и одного второго: $\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, поэтому

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \vec{a}_1 & = & 1\cdot\vec{a}_1 & + & 0\cdot\vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 & = & 0\cdot\vec{a}_1 & + & 1\cdot\vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 & = & 2\cdot\vec{a}_1 & + & 1\cdot\vec{a}_2 \end{array} \right. .$$

Сомножители скелетного разложения суть

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 2}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}.$$

Пример 2а. Найти скелетное разложение матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 20 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 22 \\ -1 & 5 & -16 & 24 \\ 1 & 3 & 0 & 16 \end{bmatrix}_{4\times 4}.$$

Проведем элементарные строчечные преобразования заданной матрицы:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 20 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 22 \\ -1 & 5 & -16 & 24 \\ 1 & 3 & 0 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -10 & 20 & -50 \\ 0 & -2 & 4 & -10 \\ 0 & 8 & -16 & 40 \\ 1 & 3 & 0 & 16 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Первые два столбца $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ ЛНЗ, третий равен сумме шести первых и минус двух вторых, а четвертый равен сумме первого и пяти вторых: $\vec{a}_3 = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\quad \vec{a}_4 = \vec{a}_1 + 5\vec{a}_2$, поэтому

$$\begin{cases} \vec{a}_1 & = & 1 \cdot \vec{a}_1 & + & 0 \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{a}_2 & = & 0 \cdot \vec{a}_1 & + & 1 \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 & = & 6 \cdot \vec{a}_1 & - & 2 \cdot \vec{a}_2 \\ \vec{a}_4 & = & 1 \cdot \vec{a}_1 & + & 5 \cdot \vec{a}_2 \end{cases}.$$

Сомножители скелетного разложения суть

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 2}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 4}.$$

Пример 2б. Найти скелетное разложение матрицы.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 20 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 22 \\ -1 & 5 & -16 & 24 \\ 1 & 3 & 0 & 16 \end{bmatrix}_{4\times 4}.$$

Перед нами прежняя матрица, но теперь мы будем проводить иные элементарные строчечные преобразования:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 20 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 22 \\ -1 & 5 & -16 & 24 \\ 1 & 3 & 0 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & -20 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 22 \\ -1 & 5 & -16 & 24 \\ 1 & 3 & 0 & 16 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & -20 & 2 \\ 14 & 0 & 84 & 14 \\ 14 & 0 & 84 & 14 \\ 10 & 0 & 60 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & -20 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -3 & 1 & -20 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 1 & -32 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Второй и четвертый столбцы $\vec{a}_2, \vec{a}_4$ ЛНЗ, первый равен сумме минус пяти вторых и одного четвертого, а третий равен сумме минус тридцати двух вторых и шести четвертых: $\vec{a}_1 = -5\vec{a}_2 + \vec{a}_4$, $\quad \vec{a}_3 = -32\vec{a}_2 + 6\vec{a}_4$, поэтому

$$\left\{ \begin{array}{lcrcl} \vec{a}_1 & = & -5 \cdot \vec{a}_2 & + & 1 \cdot \vec{a}_4 \\ \vec{a}_2 & = & 1 \cdot \vec{a}_2 & + & 0 \cdot \vec{a}_4 \\ \vec{a}_3 & = & -32 \cdot \vec{a}_2 & + & 6 \cdot \vec{a}_4 \\ \vec{a}_4 & = & 0 \cdot \vec{a}_2 & + & 1 \cdot \vec{a}_4 \end{array} \right. .$$

Сомножители скелетного разложения суть

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 22 \\ 5 & 24 \\ 3 & 16 \end{bmatrix}_{4\times 2}, \qquad C = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -32 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}.$$

Обобщение наблюдений. Пусть задана произвольная матрица

$$A_{m\times n} = [\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, \ldots\, \vec{a}_n]_{m\times n}$$

и ее упрощенный вид 2-ой ступени (применялись только строчечные преобразования, в т.ч. и перестановка строк) $A'_{m\times n} =$

$$= [\vec{0}_1 \ldots \vec{0}_{s_1-1} (\vec{e}_1)_{s_1} \vec{a}'_{s_1+1} \ldots \vec{a}'_{s_2-1} (\vec{e}_2)_{s_2} \vec{a}'_{s_2+1} \ldots\ldots \vec{a}'_{s_r-1} (\vec{e}_r)_{s_r} \vec{a}'_{s_r+1} \ldots \vec{a}'_{s_n}]$$

Параметр r это ранг матриц A, A'.

Создадим из матрицы A новую матрицу B, выбирая столбцы с базисными номерами $s_1, s_2, \ldots, s_r$:

$$B = [\vec{a}_{s_1}\ \vec{a}_{s_2}\ \vec{a}_{s_3}\ \ldots\ \vec{a}_{s_r}]_{m\times r}.$$

Создадим из матрицы $A'_{m\times n}$ матрицу $C_{r\times n}$, вычеркивая из $A'_{m\times n}$ нижние нулевые строки: $C_{r\times n} =$

$$= \big[\vec{0}_1 \ldots \vec{0}_{s_1-1} (\vec{e}_1)_{s_1} \vec{c}_{s_1+1} \ldots \vec{c}_{s_2-1} (\vec{e}_2)_{s_2} \vec{c}_{s_2+1} \ldots\ldots \vec{c}_{s_r-1} (\vec{e}_r)_{s_r} \vec{c}_{s_r+1} \ldots \vec{c}_{s_n}\big].$$

Вид матрицы A' говорит нам, что в матрице A столбцы с номерами $1, 2, \ldots, (s_1 - 1)$ — нулевые, столбцы с номерами $s_1, s_2, \ldots, s_r$ — ЛНЗ, все же столбцы — это линейные комбинации ЛНЗ столбцов с коэффициентами, образующими столбцы $\vec{a}'_k$, обрезанные до высоты r, т.е. образующими столбцы $\vec{c}_k$.

Но слова последнего абзаца и означают, что

$$A_{m\times n} = B_{m\times r} \cdot C_{r\times n}\,.$$

Пример 3. Рассмотрим матрицу

$$A_{5\times 11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{5\times 11}$$

и ее упрощенный вид второй ступени

$$A'_{5\times 11} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{5\times 11} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & {\scriptstyle 3} & & & {\scriptstyle 6} & & & & {\scriptstyle 10} & \end{array} \end{array}.$$

В исходной матрице A столбцы с номерами $3, 6, 10$ — ЛНЗ, все же столбцы — это линейные комбинации ЛНЗ столбцов с коэффициентами, образующими «короткие» столбцы матрицы A'. Скелетное разложение матрицы A таково:

$$
A_{5\times 11} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1\\
0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\
0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2
\end{bmatrix}_{5\times 11}\\
\scriptstyle \begin{array}{ccccccccccc} & & 3 & & & 6 & & & & 10 & \end{array}
\end{array} =
$$

$$
= \begin{array}{c}\begin{bmatrix}
1 & 1 & 2\\
1 & 0 & 3\\
2 & 0 & 4\\
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1
\end{bmatrix}_{5\times 3}\\
\scriptstyle \begin{array}{ccc} 3 & 6 & 10\end{array}
\end{array}
\cdot
\begin{array}{c}\begin{bmatrix}
0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & 1 & 0 & 2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1
\end{bmatrix}_{5\times 11}\\
\scriptstyle \begin{array}{ccccccccccc} & & 3 & & & 6 & & & & 10 & \end{array}
\end{array} .
$$

1.2.3 Второй способ нахождения СРМ

Матрица $A_{m\times n}(\operatorname{rang} A = r)$ с помощью элементарных преобразований (строчечных и столбцовых) может быть упрощена:

$$
A \sim \Lambda = \left[\begin{array}{c|c} E_r & O\\ \hline O & O\end{array}\right],
$$

поэтому

$$
\left[\begin{array}{c|c} A_{m\times n} & E_{m\times m}\\ \hline E_{n\times n} & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} \Lambda_{m\times n} & S_{m\times m}\\ \hline T_{n\times n} & \end{array}\right],
$$

таким образом,

$$
\Lambda_{m\times n} = S_{m\times m}A_{m\times n}T_{n\times m}\ , \qquad A_{m\times n} = S^{-1}_{m\times m}\Lambda_{m\times n}T^{-1}_{n\times n},
$$

или в чуть более подробной блочной записи:

$$
A_{m\times n} = S^{-1}_{m\times m}\left[\begin{array}{c|c} E_r & O\\ \hline O & O\end{array}\right]_{m\times n} T^{-1}_{n\times n} =
$$

$$
= \underbrace{S^{-1}_{m\times m}\left[\begin{array}{c} E_r\\ \hline O\end{array}\right]_{m\times r}}_{B_{m\times r}} \cdot \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} E_r & O\end{array}\right]_{r\times n} T^{-1}_{n\times n}}_{C_{r\times n}} . \qquad (SSDM)
$$

В последней формуле матрица $B_{m\times r}$ получается из матрицы $S^{-1}_{m\times m}$ выделением r первых столбцов, а $C_{r\times n}$ получается из матрицы $T^{-1}_{n\times n}$ выделением r первых строк.

Определение. Представление матрицы A формулой $(SSDM)$ будем называть стандартным скелетным разложением матрицы A.

1.2.4 Одностороннее обращение сомножителей СРМ

Теорема.

$$(B^{-1l})_{r\times m} = \left[\ E_r \ \middle|\ V\ \right]_{r\times m} \cdot S_{m\times m},$$

$$(C^{-1r})_{n\times r} = T_{n\times n} \cdot \left[\frac{E_r}{U}\right]_{n\times r},$$

где $V_{r\times(m-r)}$, $U_{(n-r)\times r}$ — произвольные матрицы указанных форматов.

Доказательство. Проводится прямыми матричными вычислениями:

$$B^{-1l}\cdot B = \left[\ E_r \ \middle|\ V\ \right]_{r\times m} S_{m\times m}\cdot S^{-1}_{m\times m}\left[\frac{E_r}{O}\right]_{m\times r} =$$

$$= \left[\ E_r \ \middle|\ V\ \right]_{r\times m}\cdot\left[\frac{E_r}{O}\right]_{m\times r} = E_r,$$

$$C\cdot C^{-1r} = \left[\ E_r \ \middle|\ O\ \right]_{r\times n} T^{-1}_{n\times n}\cdot T_{n\times n}\left[\frac{E_r}{U}\right]_{n\times r} =$$

$$= \left[\ E_r \ \middle|\ O\ \right]_{r\times n}\cdot\left[\frac{E_r}{U}\right]_{n\times r} = E_r.$$

1.2.5 Связь операций одностороннего обращения с другими унарными операциями

Рассмотрим связи операций одностороннего обращения с унарными матричными операциями комплексного сопряжения, транспонирования и эрмитова сопряжения, обозначаемыми понятными общепринятыми символами: $\overline{A}$, $A^\top$, $A^* = \overline{A}^\top$.

Пусть $C_{m\times n}\cdot C^{-1r}_{n\times m} = E_m$, тогда

- $\overline{C_{m\times n}}\cdot\overline{C^{-1r}_{n\times m}} = E_m$, и, следовательно, $\overline{C}^{\,-1r} = \overline{C^{-1r}}$;
- $(C^{-1r}_{n\times m})^\top\cdot(C_{m\times n})^\top = E_m$, и, следовательно, $(C^{-1r})^\top = (C^\top)^{-1l}$;
- $(C^{-1r}_{n\times m})^*\cdot(C_{m\times n})^* = E_m$, и, следовательно, $(C^{-1r})^* = (C^*)^{-1l}$.

Аналогично

$$\overline{C}^{\,-1l} = \overline{C^{-1l}},\qquad (C^{-1l})^\top = (C^\top)^{-1r},\qquad (C^{-1l})^* = (C^*)^{-1r}.$$

1.2.6 Важные свойства матриц максимального ранга

Теорема 1. Если $\operatorname{rang} B_{m\times r} = r \ \ (r \le m)$, то $\operatorname{rang}(B^*_{r\times m}\cdot B_{m\times r}) = r$, т.е. $\det(B^*B) \ne 0$.

Доказательство. Пусть $\vec{x}$ является решением уравненения

$$(B^*B)\vec{x} = \vec{0}.$$

Умножим последнее равенство на строку $\vec{x}^*$ слева:

$$\vec{x}^*(B^*B)\vec{x} = 0.$$

Расставим удобным образом скобки и введем сокращающие обозначения:

$$\underbrace{(\vec{x}^*B^*)}_{\vec{y}^*}\cdot\underbrace{(B\vec{x})}_{\vec{y}} = 0.$$

Запишем ряд простых и понятных эквивалентностей:

$$\vec{y}^*\cdot\vec{y} = 0,\quad \sum_{i=1}^{m}\overline{y}_i\cdot y_i = 0,\quad \sum_{i=1}^{m}|y_i|^2 = 0,\quad \underset{i}{\forall}\ y_i = 0.$$

Таким обоазом рассмотренный вектор оказался нулевым:

$$\vec{y} = 0,$$

что в полных обозначениях дает уравнение

$$B_{m\times r}\cdot\vec{x}_{r\times 1} = \vec{0}_{m\times 1}.$$

Решим это уравнение, преобразуя расширенную матрицу методом Гаусса:

$$(\,B\mid\vec{0}\,)\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1_{rr} & 0\\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Уравнение имеет единственное нулевое решение $\vec{x} = \vec{0}$. Вспоминая, что $\vec{x}$ обозначает решение уравнения $(B^*B)\vec{x} = \vec{0}$, получим требуемое:

$$\det(B^*B) \ne 0.$$

Теорема 2. Если $\operatorname{rang} C_{r\times n} = r (r \le n)$, то $\operatorname{rang}(C_{r\times n} C^*_{n\times r}) = r$, т.е. $\det(CC^*) \neq 0$.

Доказательство. Аналогично предыдущему.

Следствие. Сомножители скелетного разложения являются матрицами максимального ранга, поэтому для них имеют место доказанные свойства:

$$\det(B^* B \neq 0), \qquad \det(CC^*) \neq 0.$$

1.3 Взаимные полуобратные матрицы

1.3.1 Определения и простые свойства

Определение. Для произвольной матрицы $A_{m\times n}$ матрица $A^{\neg}_{n\times m}$ называется полуобратной матрицей (ПлОМ), если выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} A_{m\times n}\, A^{\neg}_{n\times m}\, A_{m\times n} = A_{m\times n}\,, \\ A^{\neg}_{n\times m}\, A_{m\times n}\, A^{\neg}_{n\times m} = A^{\neg}_{n\times m}\,. \end{cases} \qquad (RSIM)$$

Матрицы A, $A^{\neg}$, удовлетворяющие условиям $(RSIM)$, называют взаимными полуобратными матрицами (ВПлОМ).

Свойство 1.

$$(A^{\neg})^{\neg} = A,$$

в том смысле, что если для некоторой матрицы A найдена некоторая ПлОМ $A^{\neg}$, то одним из значений ее ПлОМ будет исходная матрица A.

Свойство 2. Если A обратима, то единственная ПлОМ совпадает с обратной матрцей: $A^{\neg} = A^{-1}$.

Доказательство существования. Очевидно:

$$\begin{cases} A\, A^{-1}\, A = A\,, \\ A^{-1}\, A\, A^{-1} = A^{-1}\,. \end{cases}$$

Доказательство единственности. Пусть для некоторой матрицы B выполнены $(RSIM)$:

$$\begin{cases} A\,B\,A = A\,, \\ B\,A\,B = B, \end{cases}$$

тогда

$$A \cdot B = E \Longrightarrow B = A^{-1}.$$

Свойство 3. Эрмитово сопряжение одной из ПлОМ совпадает с одним из значений ПлОМ эрмитового сопряжения:

$$(A^{\neg})^{*} = (A^{*})^{\neg}\,.$$

Доказательство. Применим к равенствам $(RSIM)$ операцию эрмитова сопряжения:

$$\begin{cases} A^{*}\,(A^{\neg})^{*}\,A^{*} = A^{*}\,, \\ (A^{\neg})^{*}\,A^{*}\,(A^{\neg})^{*} = (A^{\neg})^{*}\,, \end{cases}$$

таким образом,

$$(A^{\neg})^{*} = (A^{*})^{\neg}\,.$$

Свойство 4. Если имеется скелетное разложение $A_{m\times n} = B_{m\times r}\cdot C_{r\times n}$, то $A^{\neg}_{n\times m} = C^{-1r}_{n\times r}\cdot B^{-1l}_{r\times m}$.

Доказательство. Проверим выполненность условий $(RSIM)$:

$$\begin{cases} (BC)(C^{-1r}B^{-1l})(BC) = B\cdot E\cdot E\cdot C = (BC)\,, \\ (C^{-1r}B^{-1l})(BC)(C^{-1r}B^{-1l}) = C^{-1r}\cdot E\cdot E\cdot B^{-1l} = (C^{-1r}B^{-1l})\,. \end{cases}$$

Условия $(RSIM)$ выполнены.

1.3.2 Вычисление полуобратной матрицы

Для матрицы $A_{m\times n}$ составим полную расширенную матрицу

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{m\times n} & E_{m\times m} \\ \hline E_{n\times n} & \end{array}\right]$$

и проведем упрощение матрицы $A_{m\times n}$ до матрицы

$$\Lambda_{m\times n} = \left[\begin{array}{c|c} E_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & \end{array}\right];$$

при этом расширенная матрица превратится в

$$\left[\begin{array}{c|c} \Lambda_{m\times n} & S_{m\times m} \\ \hline T_{n\times n} & \end{array}\right],$$

т.е.

$$\Lambda_{m\times n} = S_{m\times m}\cdot A_{m\times n}\cdot T_{n\times n}.$$

Напомним, что матрица $T_{n\times n}$ получена из матрицы $E_{n\times n}$ с помощью тех же столбцовых преобразований, что и $\Lambda_{m\times n}$ из $A_{m\times n}$, а матрица $S_{m\times m}$ получена из матрицы $E_{m\times m}$ с помощью тех же строковых преобразований, что и $\Lambda_{m\times n}$ из $A_{m\times n}$; таким образом,

$$\Lambda_{m\times n} = S_{m\times m}\cdot A_{m\times n}\cdot T_{n\times n}.$$

Теорема. Для всякой матрицы $A_{m\times n}$ ее полуобратную матрицу можно представить произведением

$$A^{\neg} = T_n \left[\frac{E_r}{U}\right]_{n\times r}\cdot\left[\begin{array}{c|c} E_r & V\end{array}\right]_{r\times m} S_m,$$

где $U_{(n-r)\times r}$, $V_{r\times(m-r)}$ это **произвольные** матрицы, имеющие размеры $\{(n-r)\times r\}$ и $\{r\times(m-r)\}$ соответственно.

Доказательство. Представим матрицу A ее скелетным разложением

$$A = B\cdot C = S_m^{-1}\left[\frac{E_r}{O}\right]_{m\times r}\cdot\left[\begin{array}{c|c} E_r & O\end{array}\right]_{r\times n} T_n^{-1}$$

и проверим выполненность двух соотношений $(RSIM)$:

1) $$A\cdot A^{\neg}\cdot A = S^{-1}\left[\frac{E_r}{O}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & O\end{array}\right]T^{-1}\cdot \cdot T\left[\frac{E_r}{U}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & V\end{array}\right]S\cdot \cdot S^{-1}\left[\frac{E_r}{O}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c} E_r & O\end{array}\right]T^{-1} =$$

$$= S^{-1}\left[\frac{E_r}{O}\right]\cdot \cdot\left[\begin{array}{c|c} E_r & O\end{array}\right]T^{-1}T\left[\frac{E_r}{U}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_r & V\end{array}\right]SS^{-1}\left[\frac{E_r}{O}\right]\cdot \cdot\left[\begin{array}{c|c} E_r & O\end{array}\right]T^{-1} =$$

$$= A;$$

2) $$A^{\neg} \cdot A \cdot A^{\neg} = T \left[\frac{E_r}{U}\right] \left[\ E_r \mid V\ \right] S \cdot$$
$$\cdot S^{-1} \left[\frac{E_r}{O}\right] \left[\ E_r \mid O\ \right] T^{-1} \cdot$$
$$\cdot T \left[\frac{E_r}{U}\right] \left[\ E_r \mid V\ \right] S =$$
$$= T \left[\frac{E_r}{U}\right] \cdot$$
$$\cdot \left[\ E_r \mid V\ \right] S S^{-1} \left[\frac{E_r}{O}\right] \left[\ E_r \mid O\ \right] T^{-1} T \left[\frac{E_r}{U}\right] \cdot$$
$$\cdot \left[\ E_r \mid V\ \right] S =$$
$$= A^{\neg}.$$

Замечание. Если требуется найти не все, а только какое-нибудь значение $A^{\neg}$, то можно положить $U = O$, $V = O$; тогда

$$A^{\neg} = T_{n\times n} \left[\frac{E_r}{O}\right]_{n\times r} \cdot \left[\ E_r \mid O\ \right]_{r\times m} S_{m\times m} =^*$$

Первый сомножитель получается из матрицы $T_{n\times n}$ выделением первых r столбцов, а второй — из матрицы $S_{m\times m}$ выделением первых r строк. В теоретических целях произведение четырех матриц можно упростить:

$$=^* T_{n\times n} \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right]_{n\times m} S_{m\times m} = T_{n\times n} \Lambda^{\top} S_{m\times m}.$$

Пример. Для прямоугольной матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ найти какую-нибудь полуобратную матрицу.

Решение. Для исходной матрицы составим полную расширенную матрицу и проведем упрощения матрицы 1-ой, 2-ой, 3-ей ступеней:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 3 & 2 & -1 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 7 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -16 & -11 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1.6 & 1.1 & -0.1 & 0.3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 0 & -1.4 & 1.6 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 1 & 1.6 & 1.1 & -0.1 & 0.3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.1 & 0.3 \\ \hline 0 & 1 & -1.6 & -1.1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \end{array}\right].$$

Видим, что $\operatorname{rang} A = 2$. Выделяя из нижней левой матрицы два первых столбца, а из правой верхней — две первые строки, получим сомножители, дающие в произведении ПлОМ:

$$A^{\neg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверка.

$$AA^{\neg} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AA^{\neg}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A,$$

$$A^{\neg}AA^{\neg} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A^{\neg}.$$

2 Псевдообратные матрицы

2.1 Псевдообратная матрица (в первом смысле)

2.1.1 Определение псевдообратной матрицы (ПсОМ)

Определение. Матрица $A^+_{n\times m}$ называется псевдообратной матрицей (ПсОМ) для матрицы $A_{m\times n}$, если выполнены следующие соотношения (соотношения Пенроуза):

$$\left\{\begin{array}{rcl} AA^+A & = & A \\ A^+AA^+ & = & A^+ \\ (AA^+)^* & = & (AA^+) \\ (A^+A)^* & = & (A^+A) \end{array}\right. \qquad (RPIM)$$

Матрицы A, A^+, удовлетворяющие условиям $(RPIM)$, называют взаимными псевдообратными матрицами (ВПсОМ).

Свойство. Всякая псевдообратная матрица является и полуобратной матрицей.

2.1.2 Существование псевдообратной матрицы

Теорема. ПсОМ A^+ может быть найдена среди ПлОМ $A^\neg$ путем подходящего выбора матричных параметров U, V матрицы $A^\neg$.

Доказательство (конструктивное). Представим исходную матрицу A стандартным скелетным разложением

$$A = S^{-1}_{m\times m}\left[\frac{E_r}{O}\right]_{m\times r}\cdot\left[\ E_r\ \middle|\ O\ \right]_{r\times n} T^{-1}_{n\times n}\,. \qquad (SSDM)$$

ПсОМ A^+ будем искать в виде

$$A^+ = T_{n\times n}\left[\frac{E_r}{U}\right]_{n\times r}\cdot\left[\ E_r\ \middle|\ V\ \right]_{r\times m} S_{m\times m}\,.$$

Вычислим два произведения:

$$AA^+ = S^{-1}\left[\frac{E_r}{O}\right]\left[\ E_r\ \middle|\ O\ \right] T^{-1}T\left[\frac{E_r}{U}\right]\left[\ E_r\ \middle|\ V\ \right] S =$$
$$= S^{-1}\left[\frac{E_r}{O}\right]\left[\ E_r\ \middle|\ O\ \right]\left[\frac{E_r}{U}\right]\left[\ E_r\ \middle|\ V\ \right] S =$$

$$= S^{-1} \left[\begin{array}{c} E_r \\ \hline O \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} E_r & V \end{array}\right] S =$$

$$= S^{-1} \left[\begin{array}{c|c} E_r & V \\ \hline O & O \end{array}\right]_{m\times m} S; \tag{1}$$

$$A^+A = T \left[\begin{array}{c} E_r \\ \hline U \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} E_r & V \end{array}\right] SS^{-1} \left[\begin{array}{c} E_r \\ \hline O \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \end{array}\right] T^{-1} =$$

$$= T \left[\begin{array}{c} E_r \\ \hline U \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} E_r & V \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} E_r \\ \hline O \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \end{array}\right] T^{-1} =$$

$$= T \left[\begin{array}{c} E_r \\ \hline U \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \end{array}\right] T^{-1} =$$

$$= T \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline U & O \end{array}\right]_{n\times n} T^{-1}; \tag{2}$$

Вычислим матрицу V, записывая для (1) третье соотношение Пенроуза $(RPIM)$, и преобразуя его понятным образом:

$$S^* \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline V^* & O \end{array}\right] (S^{-1})^* = S^{-1} \left[\begin{array}{c|c} E_r & V \\ \hline O & O \end{array}\right] S,$$

$$(SS^*)_{m\times m} \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline V^* & O \end{array}\right]_{m\times m} = \left[\begin{array}{c|c} E_r & V \\ \hline O & O \end{array}\right]_{m\times m} (SS^*)_{m\times m}\,. \tag{3}$$

Перед нами уравнение относительно матрицы $V_{r\times(m-r)}$. Для его решения запишем (SS^*) в блочном виде, нумеруя блоки двойными верхними индексами:

$$(SS^*) = \left[\begin{array}{c|c} S^{11}_{r\times r} & S^{12} \\ \hline S^{21} & S^{22} \end{array}\right]_{m\times m}.$$

Уравнение (3) в блочном виде выглядит просто, и легко упрощается:

$$\left[\begin{array}{c|c} S^{11} & S^{12} \\ \hline S^{21} & S^{22} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline V^* & O \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} E_r & V \\ \hline O & O \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} S^{11} & S^{12} \\ \hline S^{21} & S^{22} \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{c|c} S^{11} + S^{12}V^* & O \\ \hline S^{21} + S^{22}V^* & O \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} S^{11} + VS^{21} & S^{12} + VS^{22} \\ \hline O & O \end{array}\right].$$

Приравнивая друг другу одноименные блоки, получим систему матричных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rcl} S^{11} + S^{12}V^* & = & S^{11} + VS^{21}, \\ S^{12} + VS^{22} & = & O, \\ S^{21} + S^{22}V^* & = & O. \end{array}\right.$$

Т.к. матрица (SS^*) является самосопряженной и невырожденной, имеют место следующие соотношения между ее блоками:

$$(S^{11})^* = S^{11}, \quad (S^{22})^* = S^{22}, \quad (S^{12})^* = S^{21}, \quad (S^{21})^* = S^{12}, \quad \det S^{22} > 0,$$

ведь $\det S^{22}$ это главный минор матрицы (SS^*).

В силу этих соотношений система матричных уравнений упрощается эквивалентным образом до единственного тривиального уравнения, которое и определяет свое собственное решение:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S^{12}V^* & = & VS^{21} \\ VS^{22} & = & -S^{12} \\ (VS^{22})^* & = & -S^{21} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} S^{12}V^* = VS^{21} \\ V = -S^{12}(S^{22})^{-1} \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{12}(-S^{12}(S^{22})^{-1})^* = (-S^{12}(S^{22})^{-1})S^{21} \\ V = -S^{12}(S^{22})^{-1} \end{array} \right. ,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S^{12}(-S^{12}(S^{22})^{-1})^* = S^{12}(-S^{12}(S^{22})^{-1})^* \\ V = -S^{12}(S^{22})^{-1} \end{array} \right. , \quad \left\{ V = -S^{12}(S^{22})^{-1} \right. .$$

Вычислим матрицу U, записывая для (2) четвертое соотношение Пенроуза $(RPIM)$, и преобразуя его понятным образом:

$$(T^{-1})^* \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline U & O \end{array} \right] T^* = T \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline U & O \end{array} \right] T^{-1} ,$$

$$\left[\begin{array}{c|c} E_r & U^* \\ \hline O & O \end{array} \right] (T^*T) = (T^*T) \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline U & O \end{array} \right] . \tag{4}$$

Перед нами уравнение относительно матрицы $U_{(n-r)\times r}$. Для его решения запишем (T^*T) в блочном виде, нумеруя блоки двойными верхними индексами:

$$T^*T = \left[\begin{array}{c|c} T^{11}_{r\times r} & T^{12} \\ \hline T^{21} & T^{22} \end{array} \right]_{n\times n}$$

Уравнение (4) в блочном виде выглядит просто, и легко упрощается:

$$\left[\begin{array}{c|c} E_r & U^* \\ \hline O & O \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} T^{11} & T^{12} \\ \hline T^{21} & T^{22} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{11} & T^{12} \\ \hline T^{21} & T^{22} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} E_r & O \\ \hline U & O \end{array} \right] ,$$

$$\left[\begin{array}{c|c} T^{11} + U^*T^{21} & T^{12} + U^*T^{22} \\ \hline O & O \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} T^{11} + T^{12}U & O \\ \hline T^{21} + T^{22}U & O \end{array} \right]$$

Приравнивая друг другу одноименные блоки, получим систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} T^{11} + U^* T^{21} & = & T^{11} + T^{12} U, \\ T^{12} + V^* T^{22} & = & O, \\ T^{21} + T^{22} U & = & O. \end{cases}$$

Т.к. матрица (T^*T) является самосопряженной и невырожденной, имеют место следующие соотношения между ее блоками:

$$(T^{11})^* = T^{11}, \quad (T^{22})^* = T^{22}, \quad (T^{12})^* = T^{21}, \quad (T^{21})^* = T^{12}, \quad \det T^{22} > 0,$$

ведь $\det T^{22}$ это главный минор матрицы (T^*T).

В силу этих соотношений система матричных уравнений упрощается эквивалентным образом до единственного тривиального уравнения, которое и определяет свое собственное решение:

$$U = -(T^{22})^{-1} T^{21}.$$

2.1.3 Единственность ПсОМ

Теорема. Для всякой матрицы A матрица A^+, удовлетворяющая системе Пенроуза

$$\begin{cases} AA^+A & = & A \\ A^+AA^+ & = & A^+ \\ (AA^+)^* & = & (AA^+) \\ (A^+A)^* & = & (A^+A) \end{cases} \qquad (RPIM)$$

единственна.

Доказательство. Пусть две матрицы X, Y удовлетворяют системе Пенроуза $(RPIM)$:

$$\begin{cases} AXA & = & A \\ XAX & = & X \\ (AX)^* & = & (AX) \\ (XA)^* & = & (XA) \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} AYA & = & A \\ YAY & = & Y \\ (AY)^* & = & (AY) \\ (YA)^* & = & (YA) \end{cases}$$

тогда

$$X = XAX = X \cdot AX = X \cdot (AX)^* = X \cdot X^* A^* = X \cdot X^* \cdot A^* =$$

$$= X \cdot X^* A^* \cdot Y^* A^* = X \cdot (AX)^* \cdot (AY)^* = X \cdot AX \cdot AY =$$

$$= XAX \cdot AY = X \cdot AY = XA \cdot Y = XA \cdot YAY =$$

$$= XA \cdot YA \cdot Y = (XA)^* \cdot (YA)^* \cdot Y = A^*X^* \cdot A^*Y^* \cdot Y =$$
$$= A^* \cdot Y^* \cdot Y = A^*Y^* \cdot Y = (YA)^* \cdot Y = YA \cdot Y = YAY = Y$$

Нами фактически доказана

Теорема. Для всякой матрицы $A_{m\times n}$ существует единственная псевдообратная матрица $A^+_{n\times m}$, которая для квадратной невырожденной матрицы $A_{n\times n}$ совпадает с обратной матрицей $A^{-1}_{n\times n}$.

Замечание. Алгоритм вычисления A^+ изложен в предыдущем пункте.

2.1.4 Выражение ПсОМ через сомножители скелетного разложения

Теорема. Пусть $A = BC$ есть какое-нибудь скелетное разложение (при этом существуют B^{-1l} и B^{-1r}), тогда

$$A^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* .$$

Доказательство. Проводится прямой проверкой выполненности четырех уравнений Пенроуза $(RPIM)$.

1) $$\begin{aligned} AA^+A &= BC \cdot C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \cdot BC = \\ &= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = \\ &= A. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} A^+AA^+ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \cdot BC \cdot C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= C^*(CC^*)^{-1} \cdot (B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1} \cdot (B^*B)^{-1}B^* = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= A^+. \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} (AA^+) &= (BC \cdot C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*) = \\ &= (B \cdot (CC^*)(CC^*)^{-1} \cdot (B^*B)^{-1}B^*) = \\ &= (B(B^*B)^{-1}B^*) = (B(B^*B)^{-1}B^*)^* = \\ &= (AA^+)^*. \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} (A^+A) &= (C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \cdot BC) = \\ &= (C^*(CC^*)^{-1} \cdot (B^*B)^{-1}(B^*B) \cdot C) = \\ &= (C^*(CC^*)^{-1}C) = (C^*(CC^*)^{-1}C)^* = \\ &= (A^+A)^*. \end{aligned}$$

2.1.5 Свойства ПсОМ

Свойство 1.

$$(A^+)^+ = A.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что матрицы A, A^+ симметрично входят в систему уравнений Пенроуза $(RPIM)$, и вспомнить, что ПсОМ единственна.

Свойство 2.

$$(A^*)^+ = (A^+)^*.$$

Доказательство. Достаточно применить эрмитово сопряжение к каждому из четырех уравнений Пенроуза.

Свойство 3.

$$(AA^+)^2 = AA^+\,, \qquad (A^+A)^2 = A^+A\,.$$

Доказательство. Достаточно записать левые части доказываемых равенств в развернутых формах и применить первые два свойства $(RPIM)$:

$$(AA^+)^2 = AA^+ \cdot AA^+ = A(A^+AA^+) = AA^+,$$

$$(A^+A)^2 = A^+A \cdot A^+A = A^+(AA^+A) = A^+A.$$

Свойство 4. Для каждой матрицы A псевдообратная матрица A^+ пропорциональна ее эрмитово сопряженной матрице A^* с левым матричным коэффициентом пропорциональности:

$$A^+ = (A^*A)^+A^*.$$

Доказательство. Воспользуемся скелетными разложениями трех матриц:

$$A = B \cdot C, \qquad A^* = C^* \cdot B^*, \qquad A^*A = C^*B^*BC = (C^*B^*B) \cdot C.$$

По теореме из предыдущего пункта

$$\begin{aligned}(A^*A)^+ &= C^*(CC^*)^{-1}((C^*B^*B)^*(C^*B^*B))^{-1}(C^*B^*B)^* = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*BCC^*B^*B)^{-1}B^*BC = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C =\end{aligned}$$

$$= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C,$$
поэтому
$$\begin{aligned}(A^*A)^+ \cdot A^* &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C \cdot C^*B^* = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= A^+,\end{aligned}$$
опять же по теореме из предыдущего пункта.

Свойство 5. Для каждой матрицы A псевдообратная матрица A^+ пропорциональна ее эрмитово сопряженной матрице A^* с правым матричным коэффициентом пропорциональности:

$$A^+ = A^*(A^*A)^+.$$

Доказательство. Воспользуемся скелетными разложениями трех матриц:

$$A = B \cdot C, \qquad A^* = C^* \cdot B^*, \qquad AA^* = BCC^*B^* = B \cdot CC^*B^*.$$

По теореме из предыдущего пункта

$$\begin{aligned}(AA^*)^+ &= (CC^*B^*)^*(CC^*B^*BCC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*,\end{aligned}$$
поэтому
$$\begin{aligned}A^* \cdot (A^*A)^+ &= C^*B^* \cdot B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B = \\ &= A^+,\end{aligned}$$
опять же по теореме из предыдущего пункта.

2.2 Второе определение ПсОМ и его эквивалентность первому

2.2.1 Определение ПсОМ во втором смысле (ПсОМ-2)

Определение. Матрица A^+ называется ПсОМ-2 для матрицы A, если

$$\left\{\begin{array}{lccl} & AA^+A & = & A, \\ \exists\, U & A^+ & = & UA^*, \\ \exists\, V & A^+ & = & A^*V. \end{array}\right. \qquad (PIM2)$$

2.2.2 Единственность ПсОМ-2

Теорема. Для всякой матрицы A ПсОМ-2 A^+ единственна.

Доказательство. Рассмотрим две матрицы A_1^+, A_2^+, удовлетворяющие $(PIM2)$ со своими коэффициентами пропорциональности:

$$\left\{\begin{array}{rcl} AA_1^+A & = & A, \\ A_1^+ & = & U_1A^*, \\ A_1^+ & = & A^*V_1, \end{array}\right. \quad \& \quad \left\{\begin{array}{rcl} AA_2^+A & = & A, \\ A_2^+ & = & U_2A^*, \\ A_2^+ & = & A^*V_2, \end{array}\right.$$

тогда, положив,

$$D = A_2^+ - A_1^+,\ U = U_2 - U_1,\ V = V_2 - V_1,$$

получим матричную систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} ADA & = & O, \\ D & = & UA^*, \\ D & = & A^*V, \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} ADA & = & O, & \scriptstyle 1) \\ D & = & UA^*, & \scriptstyle 2) \\ D^* & = & AU^*, & \scriptstyle 3) \\ D & = & A^*V, & \scriptstyle 4) \\ D^* & = & V^*A, & \scriptstyle 5) \end{array}\right.$$

используя уравнения которой, проведем несложные выкладки:

$$(DA)^*(DA) = A^*D^*DA = A^*(D^*)DA \stackrel{3)}{=} A^*(V^*A)DA = A^*V^*(ADA) = O,$$

т.е.

$$(DA)^*(DA) = O,$$

значит, произведение двух эрмитово сопряженных матриц есть нулевая матрица, поэтому и сама матрица нулевая:

$$(DA) = O.$$

Вычислим еще одно произведение:

$$D \cdot D^* \stackrel{3)}{=} D(AU^*) = (DA)U^* = OU = O,$$

опять произведение двух эрмитово сопряженных матриц есть нулевая матрица, поэтому и сама матрица нулевая:

$$D = O,$$

ну а это и означает, что

$$A_1^+ = A_2^+.$$

2.2.3 ПсОМ-2 для матрицы, обратимой слева

Теорема. Для всякой обратимой слева матрицы B существует единственная ПсОМ-2, определяемая формулой

$$B^+ = (B^*B)^{-1}B^*;$$

причем, она оказывается и ПсОМ, т.е. $(PIM2)$ эквивалентна $(RPIM)$.

Доказательство. Составим для матрицы B систему $(PIM2)$ и преобразуем ее эквивалентным образом:

$$\left\{\begin{array}{rcl} BB^+B &=& B \\ B^+ &=& U_BB^* \\ B^+ &=& B^*V_B \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} BB^+B &=& B \\ B^+ &=& U_BB^* \\ B^+ &=& B^*V_B \\ BU_BB^*B &=& B \\ BB^*V_BB &=& B \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} BB^+B &=& B \\ B^+ &=& U_BB^* \\ B^+ &=& B^*V_B \\ B^*BU_BB^*B &=& B^*B \\ BB^*V_BBB^* &=& BB^* \end{array}\right.$$

а т.к. матрицы (BB^*), (B^*B) обратимы

$$\left\{\begin{array}{rcl} BB^+B &=& B \\ B^+ &=& U_BB^* \\ B^+ &=& B^*V_B \\ U_B &=& (B^*B)^{-1} \\ V_B &=& (BB^*)^{-1} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} BB^+B &=& B \\ B^+ &=& U_BB^* \\ B^+ &=& B^*V_B \\ U_B &=& (B^*B)^{-1} \\ V_B &=& (BB^*)^{-1} \\ B^+ &=& (B^*B)^{-1}B^* \\ B^+ &=& B^*(B^*B)^{-1} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} BB^+B &=& B \\ B^+ &=& U_BB^* \\ B^+ &=& B^*V_B \\ U_B &=& (B^*B)^{-1} \\ V_B &=& (BB^*)^{-1} \\ B^+ &=& (B^*B)^{-1}B^* \\ B^+ &=& B^*(B^*B)^{-1} \\ B^+BB^+ &=& B^+ \end{array}\right.$$

продолжая эквивалентные преобразования, получим:

$$\left\{\begin{array}{rcl} BB^+B &=& B \\ B^+ &=& U_BB^* \\ B^+ &=& B^*V_B \\ U_B &=& (B^*B)^{-1} \\ V_B &=& (BB^*)^{-1} \\ B^+ &=& (B^*B)^{-1}B^* \\ B^+ &=& B^*(B^*B)^{-1} \\ B^+BB^+ &=& B^+ \\ (BB^+)^* &=& (BB^+) \\ (B^+B)^* &=& (B^+B) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} BB^+B &=& B \\ B^+BB^+ &=& B^+ \\ (BB^+)^* &=& (BB^+) \\ (B^+B)^* &=& (B^+B) \end{array}\right.$$

а это уравнения Пенроуза. Для восстановления предпоследней системы по последней необходимо пользоваться доказанными свойствами ПсОМ.

2.2.4 ПсОМ-2 для матрицы, обратимой справа

Теорема. Для всякой обратимой справа матрицы C существует единственная ПсОМ-2, определяемая формулой

$$C^+ = C^*(CC^*)^{-1},$$

причем, она оказывается и ПсОМ, т.е. $(PIM2)$ эквивалентна $(RPIM)$.

Доказательство. Составим для матрицы C систему $(PIM2)$ и преобразуем ее эквивалентным образом:

$$\left\{\begin{array}{rcl} CC^+C &=& C \\ C^+ &=& U_C C^* \\ C^+ &=& C^* V_C \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} CC^+C &=& C \\ C^+ &=& U_C C^* \\ C^+ &=& C^* V_C \\ CU_C C^* C &=& C \\ CC^* V_C C &=& C \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} CC^+C &=& C \\ C^+ &=& U_C C^* \\ C^+ &=& C^* V_C \\ C^* C U_C C^* C &=& C^* C \\ CC^* V_C CC^* &=& CC^* \end{array}\right.$$

а т.к. матрицы (CC^*), (C^*C) обратимы

$$\left\{\begin{array}{rcl} CC^+C &=& C \\ C^+ &=& U_C C^* \\ C^+ &=& C^* V_C \\ U_C &=& (C^*C)^{-1} \\ V_C &=& (CC^*)^{-1} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} CC^+C &=& C \\ C^+ &=& U_C C^* \\ C^+ &=& C^* V_C \\ U_C &=& (C^*C)^{-1} \\ V_C &=& (CC^*)^{-1} \\ C^+ &=& (C^*C)^{-1}C^* \\ C^+ &=& C^*(CC^*)^{-1} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} CC^+C &=& C \\ C^+ &=& U_C C^* \\ C^+ &=& C^* V_C \\ U_C &=& (C^*C)^{-1} \\ V_C &=& (CC^*)^{-1} \\ C^+ &=& (C^*C)^{-1}C^* \\ C^+ &=& C^*(CC^*)^{-1} \\ C^+CC^+ &=& C^+ \end{array}\right.$$

продолжая эквивалентные преобразования, получим:

$$\left\{\begin{array}{rcl} CC^+C &=& C \\ C^+ &=& U_C C^* \\ C^+ &=& C^* V_C \\ U_C &=& (C^*C)^{-1} \\ V_C &=& (CC^*)^{-1} \\ C^+ &=& (C^*C)^{-1}C^* \\ C^+ &=& C^*(CC^*)^{-1} \\ (CC^+)^* &=& (CC^+) \\ (C^+C)^* &=& C^+C \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} CC^+C &=& C \\ C^+CC^+ &=& C^+ \\ (CC^+)^* &=& (CC^+) \\ (C^+C)^* &=& (C^+C) \end{array}\right.$$

и это уравнения Пенроуза. Для восстановления предпоследней системы по последней необходимо пользоваться доказанными свойствами ПсОМ.

2.2.5 ПсОМ-2 для произвольной матрицы

Теорема. Для всякой матрицы A со скелетным разложением $A = BC$ существует единственная ПсОМ-2, определяемая формулой

$$A^+ = C^+B^+ = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*,$$

причем, она оказывается и ПсОМ, т.е. $(PIM2)$ эквивалентна $(RPIM)$.

Доказательство. Покажем, что матрица A^+ удовлетворяет $(PIM2)$:

1) $AA^+A = BCC^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*BC = BEEC = BC = A;$

2) $$\begin{aligned} A^+ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* = \\ &= \underbrace{C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C}_{U} \cdot \underbrace{C^*B^*}_{A^*} = \\ &= UA; \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} A^+ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= C^*B^*B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= \underbrace{C^*B^*}_{A^*} \cdot \underbrace{B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*}_{V} = \\ &= A^*V. \end{aligned}$$

Покажем еще, что матрица A^+ удовлетворяет $(RPIM)$:

1) $AA^+A = A$ — это показано выше;

2) $$\begin{aligned} A^+AA^+ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \cdot BC \cdot C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= A^+; \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} AA^+ &= BC \cdot C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = \\ &= B(B^*B)^{-1}B^* = (B(B^*B)^{-1}B^*)^* = \\ &= (B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*)^* = \\ &= (AA^+)^*; \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} A^+A &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \cdot BC = \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C = C^*(CC^*)^{-1}C = \\ &= (C^*(CC^*)^{-1}C)^* = (C^*(CC^*)^{-1}C(B^*B)^{-1}(B^*B))^* = \\ &= (A^+A)^*. \end{aligned}$$

Т.к. матрицы, удовлетворяющие $(RPIM)$ и $(PIM2)$, единственны, а одна и та же матрица A^+ удовлетворяет и $(RPIM)$, и $(PIM2)$, то понятия ПсОМ и ПсОМ-2 оказываются логически эквивалентными.

Литература

[1] Бортаковский А.С., Пантелеев А.В. Линейная алгебра в примерах и задачах: Учеб. пособие. — М.: Высш. шк., 2005. — 591 с.

[2] Воеводин В.В. Линейная алгебра. Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Наука, 1980. — 400 с.

[3] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — 3-е изд. — М.: Наука, 1967. — 576 с.

[4] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения: Пер. с англ. Х.Д. Икрамова. — М.: Мир, 2001. — 430 с.

[5] Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. — М.: Наука, 1978. — 280 с.

[6] Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 480 с.

[7] Тыртышников Е.Е. Краткий курс численного анализа. — М.: ВИНИТИ, 1994. — 220 с.

[8] Хорн З., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

[9] Шикин Е.В. Линейные пространства и отображения. — М.: Изд-во МГУ, 1987. — 311 с.